'Ασκηση (H-W) / ΠΡΟΤΑΣΗ

Εστω $(E, \mathcal{T})$ τ.χ, $l \in E$ και $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία εν $X \subseteq E$

Τοτε $a_\nu \to l \Rightarrow l \in \overline{X}$

Απόδειξη:

Εστω $a_\nu \to l$ και A τυχόν ανοιχτο με $l \in A$

Τότε η $a_\nu \in A$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N} \xRightarrow{(a_\nu)\subseteq X} a_\nu \in X \cap A$ τελικά $\Rightarrow X \cap A \neq \emptyset$

Αρα, $l \in \overline{X}$

Θα κάνουμε την παραπάνω προταση να ισχύει αντιστρόφως Ορίζοντας το παρακάτω

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ενας τ.χ $(E, \mathcal{T})$ ικανοποιεί το 1° αξίωμα αριθμησιμότητας $\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\exists$ τ.π.α βάση $\mathcal{B}_x)$ του $\mathcal{N}_x$

ΠΧ

Οι μετρικοί χώροι είναι $1^{ης}$ αριθμησιμότητας γιατί
$\forall U(x) \Rightarrow (\exists r>0): B(x,r) \subseteq U$
Άρα $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}: \frac{1}{\nu_0} < r \Rightarrow B(x, \frac{1}{\nu_0}) \subseteq B(x,r) \subseteq U$

ΛΗΜΜΑ

Έστω $(E, \mathcal{T})$ τ.χ. $1^{ης}$ αριθμησιμότητας. Τότε
$(\forall x \in E)(\exists$ τ.π.α βάση$)$ $\mathcal{B}_x = \{V_1, V_2, \dots\}$ του $\mathcal{N}_x$ φθίνουσα (ως προς $\subseteq$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω τυχόν $x \in E$ και $\mathcal{A}_x = \{W_1, W_2, \dots\}$ τ.π.α βάση του $\mathcal{N}_x$
Θέτω $V_1 = W_1$, $V_2 = V_1 \cap W_2$, ..., $V_{k+1} = V_k \cap W_{k+1}$, ...
Έτσι, το $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_k \supseteq V_{k+1} \supseteq \dots$
Ενώ $\mathcal{B}_x = \{V_1, V_2, \dots, V_{k+1}, \dots\}$ φθίνουσα βάση του $\mathcal{N}_x$.
Έστω τυχόν $V_k \in \mathcal{B}_x$ με V_k τομή πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της $\mathcal{A}_x$, άρα και περιοχή του x (αφού $\mathcal{A}_x \overset{\text{βάση}}{\subseteq} \mathcal{N}_x$)
Δηλαδή, $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$
Έστω $U \in \mathcal{N}_x \xRightarrow{\mathcal{A}_x \text{ βάση}} \exists W_{\nu_0} \subseteq U \xRightarrow{V_{\nu_0} \subseteq W_{\nu_0}} V_{\nu_0} \subseteq U$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(E, \mathcal{T})$ τ.χ. $1^{ης}$ αριθμησιμότητας, $\ell \in E$ και $X \subseteq E$. Τότε
$\ell \in \overline{X} \Leftrightarrow (\exists (a_\nu)$ εν $X)$ $a_\nu \to \ell$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$(\Leftarrow)$: Ισχύει
$(\Rightarrow)$ Έστω $\ell \in X \subseteq E$ τότε, έστω $\mathcal{B}_\ell = \{V_1, V_2, \dots\}$ φθίνουσα τ.π.α βάση του $\mathcal{N}_\ell$
$\ell \in \overline{X} \Rightarrow (\forall V_k \in \mathcal{B}_\ell): V_k \cap X \neq \emptyset$.
Θεωρούμε $a_k \in V_k \cap X$, $k = 1, 2, \dots$
$(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν X. Θδο $a_\nu \to \ell$
Έστω τυχούσα περιοχή του ℓ, $U \in \mathcal{N}_\ell \xRightarrow[\text{του } \mathcal{N}_\ell]{\mathcal{B}_\ell \text{ βάση}}$
$\Rightarrow (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ V_{\nu_0} \subseteq U \xRightarrow{\mathcal{B}_\ell \text{ φθίνουσα}} (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu \geq \nu_0)\ V_\nu \subseteq U \xRightarrow{a_\nu \in V_\nu,\ \nu \in \mathbb{N}}$
$\Rightarrow (\exists \nu_0 \in \mathbb{N})(\forall \nu > \nu_0)\ a_\nu \in U \Rightarrow a_\nu \in U$ τελικά $\forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow a_\nu \to \ell$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3º
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ:

Ορισμός: f συνεχής $\iff (\forall A \in \mathcal{T}_2) : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$
(όπου $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$)

Παρατήρηση: Η f συνεχής $\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall K \text{ κλειστό εν } (E_2, \mathcal{T}_2) \text{ ισχύει} \\ f^{-1}(K) \text{ κλειστό εν } (E_1, \mathcal{T}_1). \end{array} \right.$

Αυτή η παρατήρηση αποδεικνύεται μέσω της σχέσης:
$f^{-1}(K^c) = (f^{-1}(K))^c$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $f : (E_1, \mathcal{T}_1) \to (E_2, \mathcal{T}_2)$. Τότε:
τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
i) f συνεχής
ii) $\forall$ υποβάση $\mathcal{A}$ της $\mathcal{T}_2$ και κάθε $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$
iii) $\forall$ βάση $\mathcal{B}$ της $\mathcal{T}_2$ και κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Έστω ότι f συνεχής και $\mathcal{A}$ υποβάση της $\mathcal{T}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A}) = \mathcal{T}_2$
Άρα $A \in \mathcal{T}_2 \xrightarrow{f \text{ συνεχ.}} f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_2$

(ii) $\Rightarrow$ (i): $A \in \mathcal{T}_2 = A_{\varepsilon\varepsilon} \longrightarrow A = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{\alpha_i} G_k^{(i)}$

και επιλέγουμε: $f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{\alpha_i} G_k^{(i)}\right) =$

$= \bigcup_{i \in I} \bigcap_{k=1}^{\alpha_i} f^{-1}(G_k^{(i)})$. ανοιχτό σύνολο (ένωση συνδυασμός)

Τα $G_k^{(i)}$ είναι σύνολα (στοιχεία) της $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(G_k^{(i)}) \in \mathcal{T}_1$

(i) $\Rightarrow$ (iii): Προφανές αφού $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): $A \in \mathcal{T}_2 \xRightarrow{\mathcal{B} \text{ βάση}} A = \bigcup_{i \in I} B_i, \ B_i \in \mathcal{B}$
$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_1$

ΕΡΓΑΣΙΑ / Αναφερόμενη στην Πρόταση 11.5.2

Έστω E μη κενό σύνολο και N_a, $a\in E$ μία οικογένεια συλλογών υποσυνόλων του E τέτοια ώστε
$(\forall a\in E)$ να ισχύουν οι ιδιότητες i, ii, iii, iv της σελ. 254
ΝΔΟ τότε $\exists$ ακριβώς μία τοπολογία $\mathcal{T}$ στο E ώστε το σύστημα περιοχών του τυχόντος σημείου $a\in E$ (ως προς την $\mathcal{T}$) να είναι το N_a.

ΛΥΣΗ ΤΗΣ 1ης ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

1) $R=\{X\subseteq E : X^c\in\mathcal{T}\}$

Έχουμε ότι

i. $\emptyset\in R \Rightarrow E = E\setminus\emptyset = \emptyset^c\in\mathcal{T}$

$E\in R \Rightarrow \emptyset = E\setminus E = E^c\in\mathcal{T}$.

ii. $A,B\in\mathcal{T}\Rightarrow\{A^c,B^c\}\subseteq R$ ενώ $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$ δηλ. είναι μία πεπερασμένη ένωση στοιχείων της R τότε από την υπόθεση $A\cap B\in\mathcal{T}$

iii. Έστω $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}$ και έτσι $C\in\mathcal{C}\subseteq\mathcal{T}\Rightarrow C^c\in R$

Άρα, $\{C^c / C\in\mathcal{C}\}\subseteq R$ και έτσι αφού

$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C^c = \bigcap\{C^c / C\in\mathcal{C}\}\in R \Rightarrow \left(\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C\right)^c\in R \Rightarrow \bigcup\mathcal{C}\in\mathcal{T}$.

Επομένως, η $\mathcal{T}$ τοπολογία και μένει νδο τα κλειστά υποσύνολα του E είναι ακριβώς τα στοιχεία της R

$X\subseteq E$

$X^c\in\mathcal{T}\Leftrightarrow (X^c)^c\in R\Leftrightarrow X\in R\Rightarrow X^c\in\mathcal{T}$

2) Θέλουμε νδο $R=\{X\in P(E) / X = K(X)\}$ είναι συλλογή κλειστών συνόλων

i. $\emptyset\in R$

$E\subseteq K(E)$ και $K(E)\subseteq E \Rightarrow K(E)=E\Rightarrow E\in R$

ii. Έστω A και B και ΘΔΟ $A\cup B\in R$

Δηλαδή $K(A\cup B) = K(A)\cup K(B)\in R\Rightarrow A\cup B\in R$

iii. $A\subseteq B\Rightarrow K(A)\subseteq K(B)$

$K(B) = K(A\cup(B-A)) = K(A)\cup K(B-A)\supseteq K(A)$

Έτσι παίρνω μια συλλογή στοιχείων της R

$\{A_i\}_{i\in I} \subseteq R \overset{\text{ΘΔΟ}}{\Rightarrow} \bigcap_{i\in I} A_i \in R$

$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq K\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$

για το αντίστροφο

$(\forall i) \bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_i \xrightarrow{K \text{ μονότονη}} (\forall i): K\left(\bigcap_{j\in I} A_j\right) \subseteq K(A_i) \Rightarrow$

$\Rightarrow K\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} K(A_i) = \bigcap_{i\in I} A_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i = K\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \in R$ Άρα, η J τοπολογία

Τέλος, θέλω νδο $\forall S \in P(E): \bar{S} = K(S)$

Αλλά, η θήκη το ελάχιστο κλειστό $\supseteq S$.

Έστω $S \subseteq B \xRightarrow{\text{μονότονη}} K(S) \subseteq K(B) = B$.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω $E \neq \emptyset$ και $I: P(E) \to P(E)$ με ιδιότητες

- $I(\emptyset) = \emptyset$
- $A \supseteq I(A)$
- $I(I(A)) = I(A)$
- $I(A \cap B) = I(A) \cap I(B)$

ΝΔΟ $J = \{X : X \subseteq E$ και $I(X) = X\}$ τοπολογία και τέτοια ώστε $(\forall S \subseteq E)\ I(S) = S^{\circ}$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Έστω $(\mathbb{R}, J)$ συναριθμήσιμος τ.χ

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν $\mathbb{R}$ και $b \in \mathbb{R}$, με $a_\nu \to b$

ΝΔΟ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή